4 дәріс. Тақырыбы: Матрицаларға амалдар қолдану. Матрица рангі.

Матрицаларға амалдар қолдану

Матрицаларға жасалатын келесі амалдарды қарастырамыз: **санға көбейту, қосу, көбейту және кері матрица табу**.

Алдымен келесі түсініктерді енгізейік.

Квадрат матрицаның бас диагоналінің сыртындағы (бас диагональ элементтерінен басқа) элементтердің барлығы нөлге тең болса оны **диагональдік матрица** дейді. n -ші ретті диагональдык матрицаны келесі түрде жазуға болады

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Егер мұнда $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ болса, онда $d = 1$ және $d = 0$ үшін диагональдык матрица сәйкес **бірлік матрица** және **нөлдік матрица** деп аталады:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ескерту. Нөлдік матрица түсінігі кез келген тік бұрышты (квадрат емес) матрицалар үшін де енгізіледі.

Анықтама. $A=(a_{ij}),\ \ i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,n$ ***матрицасы*** *мен* λ ***санының көбейтіндісі*** (λA) *деп әрбір элементі* $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$ *тең* $C=(c_{ij}),\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$ *матрицасын айтады.*

Бұл амал үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ – сандық көбейткіштерге қатысты ассоциативті;

2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ – сандарды қосуға қатысты дистрибутивті.

Сонымен бірге $1\cdot A=A,\ (-1)\cdot A=-A,\ 0\cdot A=0$ теңдіктері орындалады.

Анықтама. *Бірдей өлшемді* A *мен* B *матрицаларының* ***қосындысы*** *деп әрбір элементі* $(c_{ij})=a_{ij}+b_{ij}$ *тең, өлшемі* A *немесе* B *өлшеміндей* $C=(c_{ij})=A+B$ *матрицасын айтады.*

Матрицаларды қосу амалы үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $A+B=B+A$ – коммутативтік;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативтік;

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивтік.

Анықтама. $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *және* $B_{n\times p}=(b_{ij})$ *матрицаларының көбейтіндісі деп элементтері*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots p, \tag{1}$$

яғни i *- ші жол мен* j *- ші баған қиылысуындағы* c_{ij} *элементі* A *матрицасының* i *- ші жолымен* B *матрицасының* j *-ші бағанының сәйкес элементтерінің қос-қостан көбейтінділерінің қосындысына тең болатын* $C_{m\times p}=AB$ *матрицасын айтады.*

Ескерту. Анықтамадан 1-ші матрицаның бағандар саны 2-ші матрицаның жолдар санына тең болатын матрицаларды ғана көбейтуге болатынын көреміз.

Бұл мысалдан $AB\neq BA$, яғни матрицаларды көбейту коммутативті емес екені көрінеді.

Матрицаларды көбейту амалы келесі қасиеттерге ие:

1) $(AB)C=A(BC)$ ассоциативті;

2) $(A+B)C=AB+BC$ және матрицаларды қосуға қатысты дистрибутивті;

3) Квадрат матрицалар үшін $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, яғни көбейтінді анықтауышы көбейткіштер анықтауыштарының көбейтіндісіне тең.

Сонымен бірге кез келген квадрат A матрица үшін

$$AE=EA=A,\ \ A\cdot 0=0\cdot A=0,$$

яғни бірлік матрица E бірлік сан сияқты, ал нөлдік матрица нөл саны сияқты роль атқарады.

Анықтама. *Егер* $AA^{-1}=A^{-1}A=E.$ (E*- бірлік матрица) теңдіктері орындалса, онда* A^{-1} *матрицасы* A ***матрицасына кері*** *деп аталады.*

Анықтама. *Анықтауышы нөлге тең емес квадрат матрица* ***нұқсансыз (невырожденной),*** *ал анықтауышы нөлге тең квадрат матрица* ***нұқсанды (вырожденной)*** *деп аталады.*

Ескерту. "Нұқсанды" немесе "нұқсансыз" түсініктері тек қана квадрат матрицалар үшін ғана қолданылатынын ескертеміз.

$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ теңдігінен нұқсанды матрица үшін кері матрица болмайтыны шығады ($0 \cdot \det A^{-1} \neq 1$).

Анықтама. $A_{n\times n} = (a_{ij})$ *квадрат матрицасы берілсе, оның* a_{ij} *элементтерінің алгебралық* A_{ij} *толықтауыштарынан құралған*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицасын ***тіркелген матрица*** *деп атайды.*

Тіркелген матрицаны алу үшін A матрицасының әрбір элементін оның алгебралық толықтауышымен ауыстырып, алынған матрицаны транспонирлеу керек.

Кері матрица туралы

Теорема. Нұқсансыз матрицалардың, тек қана солардың кері матрицалары бар және кері матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

формуласы бойынша табылады.

Матрица рангі

Анықтама. A *матрицасының* k *-* ***ші ретті миноры*** *деп* A *матрицасының кез келген* k *жолы мен кез келген* k *бағандарының қиылысуындағы элементтерінен құралған матрицаны айтады.*

Анықтама. A *матрицасының* ***рангі*** *деп осы матрицаның нұқсансыз минорларының* ***ең үлкен ретін*** *айтады да* $r(A)$ *немесе* r_A *немесе* $rangA$ *символдарының біреуімен белгілейді.*

Нөлдік матрица рангі нөлге тең деп есептеледі.

Егер A $n-$ ші ретті нұқсансыз квадрат матрица болса, онда $r(A) = n$; $\det A = 0$ болса, онда $A \neq 0$ үшін $1 \leq r(A) < n$;

A $m \times n$ өлшемді матрица болса, онда $r(A) \leq \max\{m, n\}$.

Матрица рангін табу үшін оның 1 - ші ретті минорынан бастап барлық минорларын нұқсансыздыққа зерттесе болғаны.